

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



APUNTES
SISTEMAS DE COMUNICACIONES
Cod. 549 164
Ingeniería Civil en Telecomunicaciones

Prof. Sebastián E. Godoy

Primera Edición
13 de septiembre de 2010

Prólogo

El presente libro, nace bajo la necesidad de lograr un mejor entendimiento de los alumnos que toman la asignatura de **Sistemas de Comunicaciones**, obligatoria para la carrera de Ingeniería Civil en Telecomunicaciones de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Concepción, Concepción, Chile.

El documento está totalmente escrito utilizando L^AT_EX mediante la interfaz gráfica [Kile](#) para [Ubuntu Linux](#). Además, dada la naturaleza de la obra, en forma completa está licenciada por [Creative Commons](#). Esta [Licencia Creative Commons](#) te permite copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra pero bajo las siguientes condiciones:

Atribución. Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciante.

No Comercial. No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

Sin Derivadas. No puedes alterar, transformar o generar una obra derivada a partir de esta obra.

Por otro lado, al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra. Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor. Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

El formato utilizado en el desarrollo de este documento, está basado en los apuntes del Prof. José Espinoza, PhD. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Concepción.

Sebastián E. Godoy

Departamento de Ing. Eléctrica

Facultad de Ingeniería

Universidad de Concepción

Casilla 160-C, Correo 3

Concepción, CHILE

Tel: +56 (41) 2203520

Fax: +56 (41) 2246999

e-mail: segodoy@udec.cl

web: <http://www.udec.cl/~segodoy>

Índice General

Prólogo	I
1. Introducción	1
1.1. Concepto y Medida de la Información	1
1.2. Concepto de Sistema de Comunicación	2
1.3. Concepto de Señal y Ruido	3
1.4. Clasificación de Señales	3
1.4.1. Señales Determinísticas y Aleatorias	3
1.4.2. Señales Periódicas y No periódicas	3
1.4.3. Señales Análogas y Discretas	4
1.4.4. Señales de Energía y Potencia	4
1.4.5. Señales Pares e Impares	5
1.5. Operador Promedio en el Tiempo	6
1.5.1. Potencia Promedio	6
1.5.2. Energía Promedio	7
1.6. Series de Fourier	7
1.6.1. Decibel	9
1.6.2. Razón Señal-Ruido	10
2. Modulación en Amplitud	11
2.1. Introducción	11
2.2. Modulación con Portadora Suprimida	12
2.2.1. Espectro de una señal DSB-SC	13
2.2.2. Demodulación de DSB-SC	14
2.2.3. Problemas de Sincronización	14
2.2.4. Potencia de una señal DSB-SC	15
2.3. Modulación con Gran Portadora	15
2.3.1. Demodulación de DSB-LC	18
2.3.2. Potencia de una señal DSB-LC	19
2.4. Modulación de Banda Lateral Única	20
2.4.1. Expresión Matemática señales SSB	20
2.4.2. Demodulación Señales SSB	22
2.5. Modulación de Banda Lateral Residual	22
2.6. Ruido en AM	22

2.6.1. Señales Pasabajo y Pasabanda	23
2.6.2. Ruido Pasabanda	23
2.6.3. Ruido en Sistemas DSB-SC	24
2.6.4. Ruido en Sistemas DSB-LC	25
2.6.5. Ruido en Sistemas SSB	26
3. Modulación Angular	28
3.1. Introducción	28
3.2. Representación Matemática	28
3.3. FM de Banda Angosta	30
3.4. FM de Banda Ancha	30
3.5. Ancho de Banda en FM	33
3.6. Potencia en FM	33
3.7. Demodulación de Señales FM	34
3.7.1. Método Directo	34
3.7.2. Método Indirecto	35
3.8. Preénfasis y Deénfasis	36

Capítulo 1

Introducción

Los tópicos que serán tratados acá se presentan como la base conceptual de los próximos capítulos, haciendo una revisión de los conceptos básicos como los de un sistema de comunicación, el concepto y medida de la información. Se agrega además una revisión de las operaciones básicas sobre señales, aparte de las definiciones de estas mismas y el ruido.

1.1. Concepto y Medida de la Información

La información –de forma general– corresponde a un conocimiento específico o dato de interés, que agrupado con un conjunto de datos extras, constituye un mensaje sobre un determinado ente o fenómeno. En otras palabras, se puede decir que el concepto de mensaje, viene a ser como una materialización de la información.

La información es transferida desde una fuente a un destinatario, sólo si este último no la conocía previamente. Por ejemplo, considere el escenario en que un grupo de gente mira por la ventana. Esto involucra que todos saben (tienen la información) que el día está soleado. Si alguien dice “*El día está soleado*” no es información, pues no aporta ningún dato nuevo a lo que todos conocen. Por otro lado si alguien dice “*En la noche lloverá*” para muchos si será información pues no necesariamente todos sabrán dicho dato.

Pensando en señales de voltaje, una batería de 1.5 volts no tiene mucha información que aportar, pues una vez sabido su voltaje mediante un voltímetro, este seguirá constante por muchísimo tiempo lo que no aporta ningún dato nuevo → La información está relacionada con cambios.

Por otro lado, una señal sinusoidal de voltaje varía en el tiempo, sin embargo una vez que está se ha caracterizado midiendo su amplitud, frecuencia y fase, no existe ninguna información nueva que ésta señal pueda aportar → La información está relacionada con cambios impredecibles.

Una forma de medir la información es de forma probabilística y fue derivada por Shannon. Ésta es llamada *self-information*¹ del mensaje m y se define como

$$I(m) = -\log(P(m))$$

¹Podría traducirse como *autoinformación*

en dónde $P(m)$ es la probabilidad de que el mensaje m sea elegido dentro del universo de todos los posibles mensajes M .

1.2. Concepto de Sistema de Comunicación

Un sistema de comunicación, como concepto, busca explicar la transmisión de información.

En general, cualquier sistema que permita la conexión entre una fuente de información y un destinatario de dicha información con eficiencia y confianza (sin errores) es considerado un sistema de comunicación. La Fig. 1.1 muestra un esquema básico de un sistema de comunicaciones. Acá se puede observar que el destinatario recibe la información proveniente de la fuente de la información mediante el sistema de comunicación.

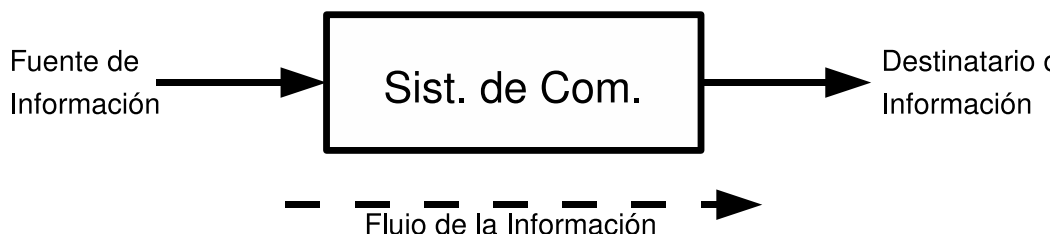


Fig. 1.1. Esquema de un Sistema Básico de Comunicaciones.

Un sistema de comunicación está compuesto básicamente de 2 partes esenciales: El transmisor y el receptor. Dentro del primero se encuentran componentes como el Codificador y el Modulador. En cambio en el receptor, se encuentran los elementos que realizan las operaciones inversas: el Demodulador y el Decodificador. La unión entre ambas partes del sistema de comunicación se realiza mediante el canal de transmisión, que corresponde al medio por el cual viajará la información.

Resulta evidente que las características del Canal de Transmisión están dadas por la naturaleza del medio a utilizar, por lo que no pueden ser modificadas de ninguna forma. De ahí es que la información tiene que ser “adaptada” para poder ser transmitida y luego “desadaptada” para poder interpretarla en el receptor. Esa es la tarea que realizan el Modulador y el Demodulador respectivamente.

No todos los sistemas de comunicación incluyen todos los bloques dados, sin embargo algo que está siempre presente es el canal de transmisión y, como se dijo anteriormente, es el que restringe el flujo de la información. Las partes de un sistema de comunicación generalizado, se pueden resumir en lo siguiente.

Codificador: Elige la mejor forma de la señal para optimizar su detección a la salida.

Modulador: Produce una señal variable en el tiempo, que resulte ser proporcional de alguna forma con la señal de información a enviar. La salida corresponde a la onda que se transmite por el canal.

Demodulador: Recupera la señal, volviéndola a su forma original.

Decodificador: Realiza lo inverso al codificador. El conjunto codificador/decodificador tiene fines de seguridad y a la vez, busca maximizar la eficiencia en la conducción de la información.

1.3. Concepto de Señal y Ruido

En general, en comunicaciones una onda recibida se categoriza como la composición de una parte deseada (información) y una parte no deseada (ruido). Esta clasificación depende exclusivamente de la señal de interés que se quiere estudiar, pudiendo cambiar entre una y otra dependiendo de la aplicación bajo estudio. Por ejemplo, al oír radio, la señal de información será la voz y la música, por lo que el “chicharreo” será la señal de ruido; en cambio si se quieren estudiar las interferencias, la señal de información será el “chicharreo” y la voz y música serán el ruido.

A continuación, se estudiarán las definiciones básicas necesarias para el tratamiento de señales en un sistema de comunicación. Dado que estos conocimientos son parte de los requisitos del curso, el resto del capítulo puede ser considerado como repaso.

1.4. Clasificación de Señales

1.4.1. Señales Determinísticas y Aleatorias

Se habla de señales **determinísticas** cuando éstas están completamente definidas y no existe ninguna incertidumbre en sus valores en cualquier instante de tiempo. Éstas señales son modeladas por expresiones matemáticas explícitas tal como $w(t) = \sin(2000\pi t)$.

Por otro lado, se habla de señales **aleatorias**, cuando existe algún grado de incertidumbre antes de que la señal realmente ocurra, por lo que no es posible escribir una expresión matemática explícita. Sin embargo si estos se observan por un largo periodo, éstos se refieren como *procesos aleatorios* y pueden exhibir ciertas regularidades que pueden ser descritas en términos de probabilidades y promedios estadísticos.

1.4.2. Señales Periódicas y No periódicas

Una señal es llamada **periódica** en el tiempo si existe una constante $T_0 > 0$ que cumpla la relación

$$w(t) = w(t + T_0) \tag{1.1}$$

en donde t es el tiempo. El mínimo valor posible de T_0 que cumpla la condición es llamado el *periodo* de $w(t)$.

Si una señal no posee un valor que satisfaga la condición, entonces es llamada **señal no periódica**.

1.4.3. Señales Análogas y Discretas

Una señal es análoga si es una función continua del tiempo, lo que quiere decir que $w(t)$ es únicamente definida para todo t . Estas señales se originan cuando una señal física (por ejemplo, voz) se transforma en una señal eléctrica usando algún transductor.

En contraste, una señal discreta sólo está definida para tiempos discretos y está caracterizada para una secuencia de números discretos kT en donde k es un entero y T es un intervalo fijo de tiempo.

Ejemplo 1.1 - Señales Periódicas.

Suponga que se desea determinar el periodo fundamental de una señal en tiempo discreto dada por $x[k] = e^{j\frac{2\pi}{3}k} + e^{j\frac{3\pi}{4}k}$, en donde $k \in \mathbb{Z}$.

Sol. Usando la ecuación de Euler, $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$, se puede determinar que el periodo básico para una exponencial compleja, está dada por 2π . Así, la primera exponencial tiene un periodo dado por $\frac{2\pi}{3}k = 2\pi$, entonces $k_1 = 3$. Para la segunda exponencial, se debe realizar el mismo análisis con múltiplos enteros del periodo básico. Como $\frac{3\pi}{4}k = 2\pi \rightarrow k = \frac{8}{3}$, el periodo requiere evaluarse incrementando en otros 2π , pues k está limitado a ser entero. Lamentablemente, $\frac{3\pi}{4}k = 4\pi \rightarrow k = \frac{16}{3}$, sin embargo con 6π se logra encontrar que $k_2 = 8$. Ahora, para que la señal $x[k]$ completa se repita, cada uno de los términos deben pasar a través de un múltiplo entero de su periodo fundamental. El mínimo incremento de k que cumple esto para ambos es 24. Esto quiere decir que sobre un incremento de 24 puntos, el primer término habrá recorrido 8 vueltas de su periodo fundamental, y el segundo 3. ■

1.4.4. Señales de Energía y Potencia

Una señal eléctrica puede ser representada como un voltaje $v(t)$, o una corriente $i(t)$, con una potencia instantánea $p(t)$ a través del resistor R , definida por:

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = i^2(t)R$$

En sistemas de comunicaciones se trabaja con el concepto de “potencia normalizada” por lo que se asume que el valor de la resistencia R es unitario ($R=1\Omega$). Así, ambos lados de la ecuación anterior tiene la misma forma sin importar si hablamos de señales de voltaje o corriente. Entonces, el concepto de potencia normalizada nos permite expresar la potencia instantánea de la forma

$$p(t) = w^2(t) \tag{1.2}$$

en donde $w(t)$ representa o una señal de voltaje o de corriente.

La energía disipada durante el intervalo de tiempo $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ por una señal real con potencia instantánea expresada por la Ecuación (1.2), puede ser escrita como:

$$E_T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w^2(t) dt \tag{1.3}$$

y la potencia promedio disipada por la señal durante ese intervalo es:

$$P_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w^2(t) dt \tag{1.4}$$

El desempeño de un sistema de comunicaciones depende de la *energía* de la señal detectada. Mientras mayor sea la energía de las señales detectadas, el proceso de detección se hará con un error menor a que si las señales fueran de menor energía. Por otro lado, la potencia es la tasa a la cual la energía es entregada y es importante porque determina las condiciones de transmisión/recepción de las señales.

En el análisis de señales de comunicaciones, resulta muy deseable trabajar con señales de energía. La señal $w(t)$ será considerada una **señal de energía** si y solo si $0 < E < \infty$, en donde

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(t) dt \quad (1.5)$$

En el mundo real, todas las señales tienen energía finita, sin embargo consecuencia de la Ecuación (1.1), las señales periódicas por definición existen para todo tiempo, por lo que tienen energía infinita. Además, para poder trabajar con señales aleatorias que tienen energía infinita, se requiere definir una clase de señales llamadas **señales de potencia**, que serán aquellas que si y solo si son no nulas y tienen potencia promedio finita para todo el tiempo, $0 < P < \infty$, en donde:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w^2(t) dt \quad (1.6)$$

Las definiciones de señales de energía y potencia son mutuamente excluyentes, ya que una señal de energía tiene energía finita pero potencia media nula, en cambio una señal de potencia tiene potencia media finita pero energía infinita. Como norma general, las señales periódicas y las señales aleatorias son consideradas de potencia. Por otro lado, las señales que a la vez son no periódicas y determinísticas son clasificadas como señales de energía.

Ejemplo 1.2 - .

Clasificar la señal e^{-t} como señal de potencia o de energía.

Sol. La potencia media de la señal está dada por $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt = \infty$, por lo que en primera instancia se podría decir que es de energía, sin embargo $E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} dt = \infty$ por lo que no cabe en ninguna de las clasificaciones ■.

1.4.5. Señales Pares e Impares

Esta clasificación se origina a partir de la respuesta de las señales a una transformación de reflexión.

Una señal es par si verifica que la reflexión de ella misma es la propia señal. Matemáticamente, se expresa en la forma $w(t) = w(-t)$. Por otra parte, una señal es impar si su reflexión produce una señal invertida de la original. Matemáticamente, se expresa en la forma $w(t) = -w(-t)$.

Una propiedad interesante, es que cualquier señal, puede ser expresada como la suma de una señal par y una impar. En símbolos,

$$w(t) = w_P(t) + w_I(t) , \quad (1.7)$$

en donde las señales par, $w_P(t)$, e impar, $w_I(t)$, están dadas por:

$$w_P(t) = \frac{1}{2} [w(t) + w(-t)] \quad (1.8)$$

$$w_I(t) = \frac{1}{2} [w(t) - w(-t)] \quad (1.9)$$

1.5. Operador Promedio en el Tiempo

El operador promedio en el tiempo para una señal cualquiera $w(t)$, se define como:

$$\langle w(t) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w(t) dt \quad (1.10)$$

y corresponde al valor continuo que la señal $w(t)$ tiene. Éste se denotará mediante w_{dc} solo cuando se hable del valor continuo.

Por otra parte, para una señal periódica con periodo T_0 , el operador promedio se reduce a:

$$\langle w(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}+a}^{\frac{T_0}{2}+a} w(t) dt \quad (1.11)$$

en donde a es una constante real arbitraria.

En general, se requiere calcular el valor continuo (DC) de la señal sobre un intervalo finito de interés $[t_1, t_2]$, por lo que se tiene la definición de valor medio en un período acotado:

$$\langle w(t) \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} w(t) dt \quad (1.12)$$

Ejemplo 1.3 - Valor Medio.

Determine el valor medio de una señal periódica dada por $w(t) = \begin{cases} A & , t \in [-T/4, T/4] \\ 0 & , i.o.c \end{cases}$.

Sol. Dada la forma de la señal, se debe trabajar sobre un solo periodo, luego $\langle w(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A dt = \frac{A}{2}$. Resulta fácil comparar que el resultado obtenido corresponde con la lógica de la definición si se dibuja la señal en el tiempo. ■

1.5.1. Potencia Promedio

La potencia promedio P para un sistema dado se calcula por su definición como el valor medio de la potencia instantánea, es decir:

$$P := \langle p(t) \rangle = \langle v(t) \cdot i(t) \rangle = \langle v^2(t) \rangle = \langle i^2(t) \rangle \quad (1.13)$$

en donde $v(t)$ e $i(t)$ corresponden a las señales de voltaje y corriente instantáneas, respectivamente; y la igualdad se justifica por el concepto de potencia normalizada que se explicó con anterioridad.

Ejemplo 1.4 - Potencia Promedio.

Determine el valor de la potencia promedio de una señal sinusoidal $w(t) = A \cos \omega_0 t$.

Sol. Dado que la señal es periódica, entonces se clasifica como señal de potencia, luego su potencia promedio es finita y mayor que cero. Luego $P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w^2(t) dt = \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{A^2}{2}$, en donde se ha utilizado la propiedad trigonométrica que dice $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha)$, y el hecho de que la integral de una función sinusoidal sobre un periodo es cero. ■

Se define el **valor RMS** (Root Mean Square) de una señal $w(t)$ mediante la relación

$$w_{RMS} := \sqrt{\langle w^2(t) \rangle} \tag{1.14}$$

Dada la definición del valor RMS, resulta natural notar por la forma de la Ecuación (1.13), la potencia promedio normalizada se puede calcular como el valor RMS cuadrático de la corriente o el voltaje. En efecto:

$$\begin{aligned} P &= \langle v^2(t) \rangle = \langle i^2(t) \rangle \\ &= V_{RMS}^2 = I_{RMS}^2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.5.2. Energía Promedio

La **Energía Normalizada** está definida por

$$E := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} w^2(t) dt \tag{1.16}$$

en dónde la señal $w(t)$ es una señal de energía sí y solo si $0 < E < \infty$

Ejemplo 1.5 - .

Calcular la potencia y energía promedio de la señal $w(t) = e^{-t}$.

Sol. La potencia promedio por definición será $P = w_{RMS}^2 = \infty$ y la energía $E = \infty$. ■

1.6. Series de Fourier

Las series de fourier permiten descomponer cualquier señal periódica $w(t)$ en una sumatoria de senos y cosenos. En particular, en comunicaciones se utiliza la definición compleja de ésta, que está dada por:

$$w(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{1.17}$$

en donde

$$c_n := \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} w(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \tag{1.18}$$

y $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, siendo T_0 el período de la señal $w(t)$. Es interesante notar que la forma compleja de las series de Fourier dan origen a la forma tradicional, al trabajar con señales reales,

en donde se encuentran los coeficientes a_n y b_n que multiplican cosenos y senos respectivamente. En efecto, al considerar una señal real, entonces $w^*(t) = w(t)$, por lo tanto:

$$w^*(t) = w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-jn\omega_0 t} .$$

Reemplazando n por $-n$ en la sumatoria, se obtiene que

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{jn\omega_0 t} ,$$

de donde, por comparación con la Ecuación (1.17), se deduce que $c_n = c_{-n}^*$, o equivalentemente, que $c_n^* = c_{-n}$.

Ahora, si se reagrupa la sumatoria de la Ecuación (1.17) de la forma

$$w(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}] ,$$

y si se reemplaza c_n^* por c_{-n} , se tiene que

$$w(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{jn\omega_0 t} + c_n^* e^{-jn\omega_0 t}] .$$

Dado que los dos términos de la sumatoria son complejos conjugados, entonces puedes ser reemplazados por $2\Re\{c_n e^{jn\omega_0 t}\}$. Además, expresando el coeficiente en su forma polar mediante $c_n = b_n e^{j\theta_n}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} w(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{jn\omega_0 t} + c_n^* e^{-jn\omega_0 t}] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\Re\{c_n e^{jn\omega_0 t}\} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\Re\{b_n e^{jn\omega_0 t + \theta_n}\} . \end{aligned}$$

Esto no es más que

$$w(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(jn\omega_0 t + \theta_n) .$$

Por otra parte, si se considera que los coeficientes b_n son reales, entonces $\theta_n = 0$, obteniendo una de las formas tradicionales en que las series de Fourier son presentadas.

Ejemplo 1.6 - Series de Fourier.

Encontrar la serie de fourier de la señal $w(t) = \begin{cases} A & , t \in (2k\frac{T_0}{2}, (2k+1)\frac{T_0}{2}] \\ 0 & , i.o.c. \end{cases}$ con $k = 0, 1, 2, \dots$

Sol. Se comienza calculando el valor continuo: $c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} w(t) dt = \frac{A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} dt = \frac{A}{2}$. Ahora, los otros valores de los coeficientes serán: $c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} w(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} w(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = j \frac{A}{2\pi n} (e^{-jn\pi} - 1)$. Dado que para n par, $e^{-jn\pi} = 1$ y para n impar $e^{-jn\pi} = -1$, los coeficientes están dados por: $c_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & , n = 0 \\ -j \frac{A}{n\pi} & , n \text{ impar} \\ 0 & , n \text{ par} \end{cases}$.

Cuando una señal está definida en tiempo discreto, entonces su representación en series de Fourier está determinado por:

$$w[k] = \sum_n c_n e^{jn\omega_0 k} = \sum_n c_n e^{jn \frac{2\pi}{K} k} ,$$

en donde K corresponde al periodo de la señal discreta $w[k]$, vale decir que cumple la relación $w[k] = w[k + K]$. La frecuencia fundamental de la señal está determinada por $\omega_0 = \frac{2\pi}{K}$. Dado que la señal es distinta solo dentro de un rango de K valores sucesivos de k , la sumatoria de la ecuación anterior solo se necesita incluir los términos dentro de este rango, quedando la sumatoria dada por

$$w[k] = \sum_{n \in K} c_n e^{jn \frac{2\pi}{K} k} . \tag{1.19}$$

Por ejemplo, n puede tomar los valores de $n = 0, 1, \dots, K - 1$, o $n = 3, 4, \dots, N + 2$, obteniéndose el mismo resultado. La Ecuación (1.19) se conoce como la **Serie de Fourier en tiempo discreto** y los términos c_n son los coeficientes de Fourier.

1.6.1. Decibel

El decibel es una medida logarítmica de base 10 que hace relaciones de potencia entre una señal y otra. Se define por:

$$w [dB] := 10 \log[w(t)] \tag{1.20}$$

Por ejemplo, la ganancia en dB de un sistema de comunicación está dado por

$$G [dB] = 10 \log \left[\frac{P_{out}}{P_{in}} \right] = 10 \log \left[\frac{V_{oRMS}^2}{R_o} \cdot \frac{R_i}{V_{iRMS}^2} \right] = 20 \log \left[\frac{V_{oRMS}}{V_{iRMS}} \right]$$

En la práctica, se usa un nivel de potencia en dB con respecto a 1mW de potencia, por lo que

$$dB_m = 10 \log \left[\frac{P [W]}{10^{-3} [W]} \right] = 30 + 10 \log(P [W]) .$$

Además, se puede comparar la potencia de la portadora con respecto a uno de sus armónicos, caso para el que la notación que se utiliza es el *dBc*.

Es importante notar que al sumar señales medidas en decibeles, no es correcto sumar directamente valores.

Ejemplo 1.7 - Señales en dB.

Considere dos fuentes de ruido de 21dB cada una. Determine la interferencia total en dBm.

Sol. Si una fuente es de 21dB, entonces la potencia que tiene está dada por $21dB = 10 \log \frac{P}{P_{ref}}$, lo que implica que $\frac{P_1}{P_{ref}} = \frac{P_2}{P_{ref}} = 10^{\frac{21dB}{10}}$. Entonces, interferencia total en dB estará dada por $dB_{total} = 10 \log \left[20^{\frac{21dB}{10}} \right] = 24dB$, que expresado en dBm, serán $dBm_{total} = 54dBm$. ■

1.6.2. Razón Señal-Ruido

La razón señal-ruido, denotada como SNR o S/N de su nombre en inglés *Signal-to-Noise Ratio*, corresponde a una comparación entre la potencia de una señal deseada, con respecto a la potencia de una señal no-deseada, que se denomina *ruido de fondo*.

Resulta evidente que mientras mayor sea la razón, menor es la distorsión que el ruido puede provocar en una comunicación. En efecto, si el ruido presente, se caracteriza por su potencia media N y, consecuentemente, la señal se caracteriza por su potencia media S se tiene: (i) Si N es pequeña, la potencia de la señal también puede serlo, pues no se requerirá mucho esfuerzo para poder identificarla, en cambio (ii) cuando la potencia del ruido es demasiado alta, para poder diferenciar entre una y la otra, la potencia de la señal también debe serlo.

La razón señal ruido en general se mide en dB, por lo que está definida como

$$SNR = 10 \log \left[\frac{S}{N} \right] \text{ [dB]} \tag{1.21}$$

Capítulo 2

Modulación en Amplitud

COMENTAR ALGO...

2.1. Introducción

Dado que los canales de transmisión no siempre tienen un ancho de banda en el mismo rango que las señales que se quieren transmitir, se genera la necesidad de “adaptar” la señal de información para lograr una congruencia entre su ancho de banda (banda base) y el del canal (pasa banda). Dicho proceso de adaptación recibe el nombre de *modulación*.

La señal analoga a transmitir, $m(t)$ se asume de banda limitada, con ancho de banda W . En símbolos, $F[m(t)] = 0$, si $|f| > W$. La potencia de esta señal de información, P_m estará dada por

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |m(t)|^2 dt .$$

Los parámetros de la señal portadora, $s_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$, podrán ser modificados en forma proporcional a la señal de información. Entonces, se dice que el mensaje $m(t)$ modula la señal portadora $s_c(t)$ en amplitud, frecuencia o fase, si luego del proceso, la amplitud, frecuencia o fase respectivamente, son una función de la señal del mensaje.

En otras palabras, se podría decir que el proceso de modulación, convierte una señal de banda base en una señal pasabaja, en las vecindades de ω_c , como se verá más adelante. La modulación de la portadora se realiza para lograr al menos uno de los siguientes objetivos:

1. Trasladar las frecuencias de una señal pasabaja en una señal pasabanda que cuadre con las características del canal por que se realizará la transmisión.
2. Simplificar la estructura del transmisor utilizando altas frecuencias; por ejemplo en bajas frecuencias se requieren grandes antenas.
3. Acomodar la transmisión simultanea de señales de diferentes fuentes de información.
4. Expandir el ancho de banda de la señal transmitida para mejorar su inmunidad al ruido e interferencias.

Los objetivos 1, 2 y 3 se pueden lograr mediante modulación AM. El objetivo 4 se puede lograr mediante modulación angular, que se verá en el siguiente capítulo.

2.2. Modulación con Portadora Suprimida

La modulación en amplitud con portadora suprimida, *double-sideband suppressed-carrier* (DSB-SC), corresponde a la modulación más básica ya que se obtiene simplemente imprimiendo en forma directa la señal de información ó mensaje, $m(t)$, en la amplitud de la señal portadora. Esto se logra realizando la multiplicación entre ambas señales. En efecto, considere la señal cosenoidal dada por

$$s(t) = A \cos[\theta(t)] = A \cos[2\pi f_c t + \delta] ;$$

ahora, si la amplitud A se hace variar con el tiempo, $A \equiv A(t)$, esta recibe el nombre de *envolvente*. Teniendo una amplitud proporcional a cierta señal de información $m(t)$, vale decir $A \equiv A(t) = k_a m(t)$ y asumiendo que sus variaciones son mucho más lentas que las del ángulo $\theta(t)$, se puede definir la señal AM de portadora suprimida como:

$$s_m(t) := m(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.1)$$

en donde, por simplicidad, se considera que k_a y A_c son unitarias y, por definición, la fase se hace nula. En esta señal se identifican: $m(t)$ como la señal moduladora (mensaje), $s_c(t) = \cos(2\pi f_c t)$ como la señal portadora y $s_m(t)$ como la señal modulada.

El resultado de aplicar la modulación con portadora suprimida se puede ver en la Fig. 2.1, en donde se muestra el mensaje, la portadora y la señal modulada en el tiempo.

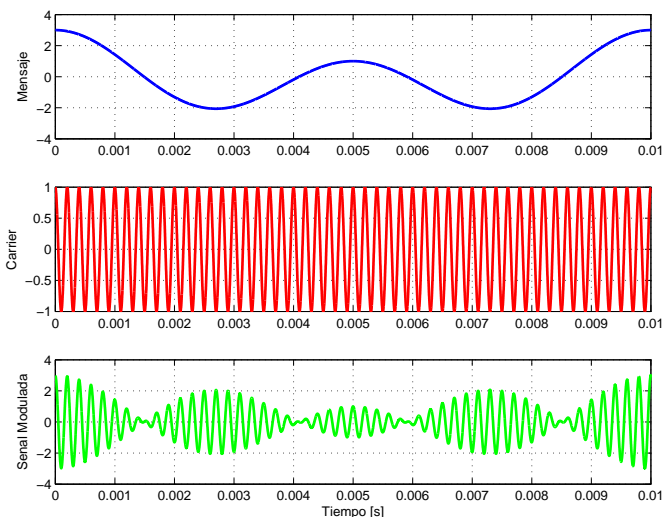


Fig. 2.1. Modulación DSB-SC. Señales en el tiempo

2.2.1. Espectro de una señal DSB-SC

Considerando que la TdeF de $m(t)$ es $M(f) \equiv F[m(t)]$, el espectro de la señal modulada está dado por:

$$F[s_m(t)] = F[m(t) \cos(2\pi f_c t)] = \frac{1}{2}M(\omega + \omega_c) + \frac{1}{2}M(\omega - \omega_c) ,$$

en donde se ha aplicado la propiedad de traslación en frecuencia de la transformada de Fourier de la función coseno.

Aplicando este principio al ejemplo dado en la Fig. 2.1, en donde $m(t) = \cos \omega_m t + 2 \cos 2\omega_m t$, el espectro del mensaje estará dado por:

$$M(f) \equiv F[m(t)] = F[\cos \omega_m t + 2 \cos 2\omega_m t] = \frac{1}{2}\delta(\omega \pm \omega_m) + \delta(\omega \pm 2\omega_m) .$$

Ahora, el espectro de la señal modulada, quedará determinada por el desplazamiento en frecuencia dada por la portadora. En efecto,

$$F[s_m(t)] = \frac{1}{4}\delta[\omega \pm (\omega_c \pm \omega_m)] + \frac{1}{2}\delta[\omega \pm (\omega_c \pm 2\omega_m)] ,$$

lo que se comprueba en la Fig. 2.2. Acá se ha considerado que las frecuencias del mensaje y de la portadora son $\omega_m = 200\pi$, y $\omega_c = 10000\pi$, respectivamente.

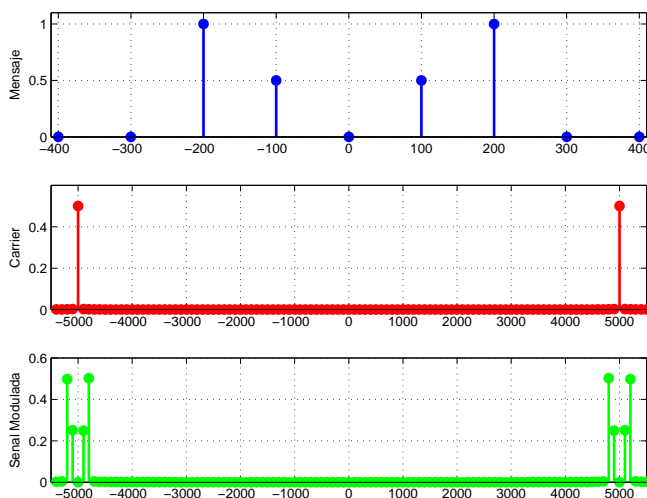


Fig. 2.2. Modulación DSB-SC. Espectro de las señales de la Fig. 2.1

Conforme a lo que se puede observar en la Fig. 2.2, los espectros pueden ser divididos en una banda superior y una banda inferior. Se observa además que tanto la banda superior (UP, Upper Band) como la inferior (LB, Lower Band) poseen la misma información; vale decir, la información se refleja sobre el eje de las ordenadas, por lo que se encuentra “repetida”. Así, el nombre de esta modulación se justifica por la presencia de ambas bandas en el espectro, y la ausencia de la portadora en el mismo.

2.2.2. Demodulación de DSB-SC

El proceso de recuperación de la señal recibe el nombre de **demodulación** y se realiza mediante la multiplicación de la señal modulada por la portadora, y la aplicación de un filtro pasabajos. En efecto, al realizar la multiplicación, se tiene:

$$\begin{aligned}
 s_m(t) \cos(2\pi f_c t) &= [m(t) \cos(\omega_c t)] \cos(\omega_c t) \\
 &= m(t) \cos^2(\omega_c t) \\
 &= m(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_c t) \right] \\
 &= \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cos(2\omega_c t)
 \end{aligned}$$

en donde se ha utilizado la identidad trigonométrica dada por $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$.

Ahora, tomando la TdeF se tiene:

$$\mathcal{F} [s_m(t) \cos(2\pi f_c t)] = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cos(2\omega_c t) \right] = \frac{1}{2} M(\omega) + \frac{1}{4} M(\omega \pm 2\omega_c)$$

Entonces, al incluir un filtro pasabajo (LPF, *Low-Pass Filter*) con una frecuencia de corte inferior a $2\omega_c$, pero superior a W , la señal original se obtendrá a la salida del filtro, con una atenuación se puede despreciar si el filtro tiene ganancia 2 en la banda permitida. Evidentemente, se requiere que $\omega_c > W$, en donde W es el ancho de banda del mensaje $m(t)$.

2.2.3. Problemas de Sincronización

Si la frecuencia del receptor ω_c es diferente a la del transmisor, la demodulación no resulta válida. Para demostrar esto, supóngase una pequeña diferencia en la frecuencia que se denotará como $\Delta\omega$. Entonces, la portadora del receptor estará determinada por la ecuación $\cos(\omega_c + \Delta\omega)t$. Luego, al entrar al demodulador, se generará la señal:

$$\begin{aligned}
 s_m(t) \cos(\omega_c + \Delta\omega)t &= m(t) \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c + \Delta\omega)t \\
 &= m(t) \left[\frac{1}{2} \cos \Delta\omega t + \frac{1}{2} \cos(2\omega_c + \Delta\omega)t \right] \\
 &\xrightarrow{LPF} \frac{1}{2} m(t) \cos \Delta\omega t .
 \end{aligned}$$

Es evidente, que la señal obtenida a la salida del demodulador no corresponde ni en el tiempo ni espectralmente a la señal originalmente enviada. Esto permite determinar que la detección para una modulación DSB-SC debe ser **sincrónica**.

De igual forma, se puede demostrar que la detección requiere que el proceso se realice con portadoras de la misma fase, lo que implica tener una detección **coherente en fase**.

Para lograr tal sincronización, en transmisores de larga distancia, se envía una *portadora piloto*, que es una portadora modificada en amplitud y frecuencia: atenuada y a una frecuencia que no altere la transmisión DSB-SC. La sincronización se logra utilizando circuitos PLL (Phase-Locked Loop)

2.2.4. Potencia de una señal DSB-SC

Para poder procesar el contenido de potencia de una señal DSB-SC, se emplea la definición dada por la Ecuación (1.6):

$$\begin{aligned}
 P_{sc} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_m^2(t) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [m(t) \cos \omega_c t]^2(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} m^2(t) [1 + \cos 2\omega_c t] dt \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} m^2(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} P_m, \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

en donde P_m representa la potencia en la señal del mensaje $m(t)$. El penúltimo paso en el desarrollo se justifica en el hecho de que al calcular la integral de $m^2(t) \cos 2\omega_c t$ sobre un periodo completo, se produce una cancelación casi completa entre cada semiciclo ya que la envolvente es muy suave. Además este pequeño valor de la integral, se pondera sobre T y dado que es muy grande, el aporte final en el resultado es nulo.

Ejemplo 2.1 - Potencia en DSB-SC.

Considerando un tono dado por $m(t) = A \cos \omega_m t$, determine la potencia de la señal modulada en cada una de las bandas laterales. Para esto, considere que la portadora posee una amplitud dada por A_c .

Sol. Se sabe que la potencia media de una señal sinusoidal está determinada por $\frac{A^2}{2}$, luego $P_{sc} = \frac{A_c^2}{2} P_m = \frac{A_c^2 A^2}{4}$. Dada la simetría de las bandas laterales, las potencias de la banda superior e inferior, P_{us} y P_{ls} , serán iguales a $P_{us} = P_{ls} = \frac{A_c^2 A^2}{8}$. ■

Nótese, que el cálculo de la potencia se puede realizar mediante cálculos estadísticos al considerar que el valor medio de la potencia corresponde al valor medio del cuadrado de la señal. En efecto,

$$P_{sc} = E \{s_m^2(t)\} = E \{m^2(t) \cos^2 \omega_c t\} = \frac{1}{2} E \{m^2(t)\} = \frac{1}{2} P_m, \tag{2.3}$$

en donde $E \{.\}$ representa la esperanza, que en este caso correspondería a la media temporal de las señales.

2.3. Modulación con Gran Portadora

Dados los posible problemas de sincronización que presenta la modulación con portadora suprimida y puesto que utilizar una portadora piloto implica una mala utilización del ancho de

banda disponible, se plantea la solución de transmitir el mensaje más la portadora sin realizar ninguna modificación sobre ella. Así, esta modulación que es conocida como *Double-Sideband Large Carrier*, DSB-LC o simplemente AM, está descrita por la ecuación:

$$s_m(t) := A_c \cos \omega_c t + m(t) \cos \omega_c t = [A_c + m(t)] \cos \omega_c t, \quad (2.4)$$

en donde la forma de onda del mensaje, $m(t)$, es elegida de tal forma que cumpla la condición que $\text{máx}[m(t)] \leq A_c$. Mientras dicha condición sea satisfecha, la amplitud $A_c + m(t)$ será siempre positiva, que es la condición que se desea para el correcto funcionamiento del proceso de detección como se comentará más adelante. En caso contrario, se habla de *sobremodulación*.

Como es de esperarse, la señal en el tiempo difiere de la obtenida mediante la modulación DSB-SC, ya que con o sin presencia de la señal de mensaje, se tendrá una señal a la salida: la portadora. La Fig. 2.3 muestra el resultado de aplicar la modulación sobre el mismo mensaje descrito en la sección anterior. Nótese que la señal modulada es diferente y no se produce el cruce por cero al tener una señal bipolar. Para este ejemplo, se utilizó una amplitud de $A_c = 3$ para la portadora agregada.

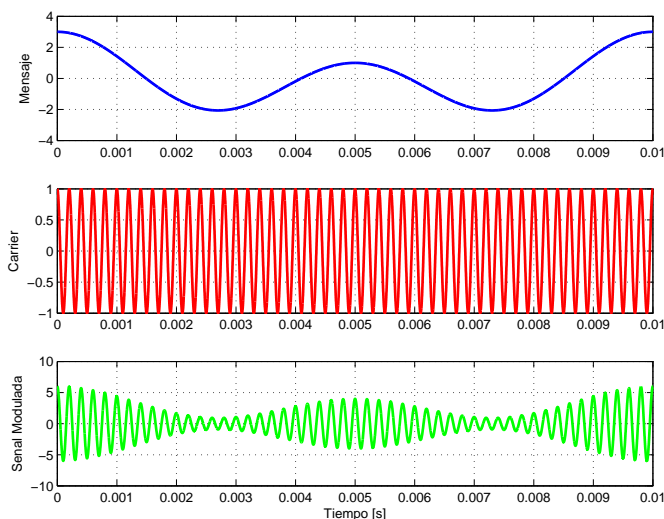


Fig. 2.3. Modulación DSB-SC. Señales en el tiempo

Desde el punto de vista de diferencias espectrales, se puede observar que el problema de sobremodulación se logra eliminar si se mantiene bajo control la relación que existe entre las bandas laterales y la portadora. Para ello, se define el *índice de modulación* como la razón entre el máximo valor que adquiere la señal del mensaje, sobre la amplitud de la portadora. En símbolos,

$$a = \frac{\text{máx}[m(t)]}{A_c}. \quad (2.5)$$

Resulta de interés mencionar que el problema de la sobremodulación se presentará cuando el índice de modulación sea mayor a la unidad. Además, de tener un índice nulo no habrá modulación, por lo que la restricción se reduce a limitar el índice al rango $0 < a \leq 1$.

Al introducir el índice de modulación en la ecuación que define la modulación DSB-LC, se tiene

$$\begin{aligned} s_m(t) &= [A_c + m(t)] \cos \omega_c t \\ &= A_c \left[1 + \frac{m(t)}{A_c} \right] \cos \omega_c t \\ &= A_c [1 + a m_n(t)] \cos \omega_c t , \end{aligned}$$

en donde se ha introducido la señal normalizada del mensaje $m_n(t)$, que asume el valor mínimo de -1. Esto puede obtenerse, por ejemplo, mediante

$$m_n(t) = \frac{m(t)}{\text{máx}[m(t)]} .$$

Es interesante considerar un tono de prueba, $m(t) = \cos \omega_m t$, para esta modulación y estudiar que sucede cuando se tiene un índice de modulación a . Reemplazando, se tiene

$$\begin{aligned} s_m(t) &= A_c [1 + a \cos \omega_m t] \cos \omega_c t \\ &= A_c \cos \omega_c t + a A_c \cos \omega_m t \cos \omega_c t \\ &= A_c \cos \omega_c t + a \frac{A_c}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t + a \frac{A_c}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t , \end{aligned}$$

de donde se puede deducir que, en terminos espectrales, el incluir la portadora ha agregado también su espectro a la señal DSB-SC. Entonces, utilizando la propiedad de la suma de la transformada de fourier, el espectro de la señal DSB-LC corresponde a la suma de los espectros individuales de la señal DSB-SC y el espectro de la portadora. Esto se puede corroborar al observar la Fig. 2.4, en donde aparece el espectro de la portadora amplificado en A_c unidades.

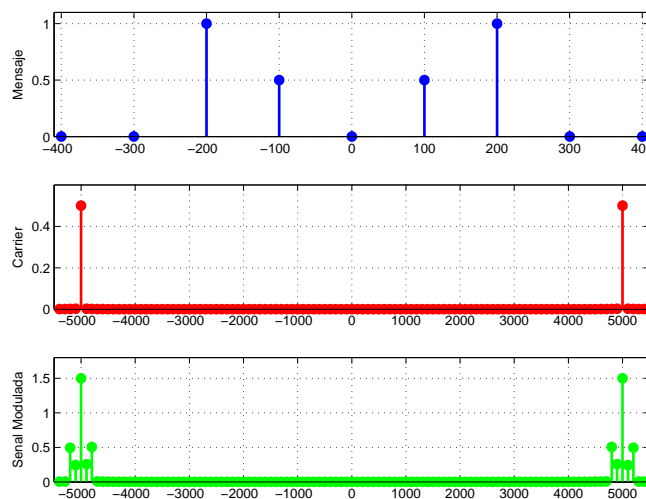


Fig. 2.4. Modulación DSB-SC. Señales en el tiempo

Es conveniente definir el porcentaje de modulación para una señal DSB-LC, mediante

$$\begin{aligned}
 [\% \text{ mod}] &= \frac{A_{\text{máx}} - A_{\text{mín}}}{A_{\text{máx}} + A_{\text{mín}}} 100 \% \\
 &= \frac{(A_c + \text{máx}[m(t)]) - (A_c - \text{máx}[m(t)])}{(A_c + \text{máx}[m(t)]) + (A_c - \text{máx}[m(t)])} 100 \% \\
 &= a 100 \%
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

en donde $A_{\text{mín}}$ y $A_{\text{máx}}$ corresponden al mínimo y máximo valores de amplitud que alcanza la señal modulada, respectivamente.

2.3.1. Demodulación de DSB-LC

Se puede demostrar que al igual que la demodulación con portadora suprimida, la demodulación con gran portadora se puede realizar mediante un proceso sincónico y coherente en fase. En efecto, al multiplicar por la portadora se obtiene

$$\begin{aligned}
 s_m(t) \cos \omega_c t &= [A_c + m(t)] \cos^2 \omega_c t \\
 &= [A_c + m(t)] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_c t \right] \\
 &\xrightarrow{LPF} \frac{1}{2} A_c + \frac{1}{2} m(t) ,
 \end{aligned}$$

en donde la constante $\frac{1}{2}A_c$ puede ser eliminada mediante algún mecanismo de filtrado básico.

Sin embargo, la mayor ventaja de esta modulación es que la información se encuentra disponible en la envolvente de la moduladora mientras se cumpla la condición de no estar sobremodulando la señal transmitida. Así, resulta fácil visualizar que la información está incluida tanto en la envolvente positiva como negativa, por lo que se utiliza un **rectificador** para elegir una de ambas. Posteriormente, la señal se hace pasar por un **filtro pasabanda** (Bandpass Filter, BPF) para eliminar las altas frecuencias que no son de interés. Cabe recordar que otra condición implícita para la modulación AM, es que la frecuencia de la portadora sea mucho mayor que la del mensaje, lo que justifica la utilización del filtro para eliminar la portadora. La combinación rectificador-filtro se llama **detector de envolvente**, y resulta fácil demostrar que el ancho de banda del filtro debe ser concordante con el ancho de banda de la señal del mensaje.

Idealmente, la salida de un detector de envolvente es de la forma

$$d(t) = k_1 + k_2 m(t) ,$$

en donde k_1 representa la componente DC y k_2 es un factor de ganancia debido al demodulador de señal. La componente DC puede ser eliminada pasando $d(t)$ a través de un transformador, en donde la salida será entonces $k_2 m(t)$.

2.3.2. Potencia de una señal DSB-LC

Considerando la potencia media para una señal con gran portadora se tiene

$$\begin{aligned}
 P_{lc} &= E \{s_m^2(t)\} = E \{[A_c + m(t)]^2 \cos^2 \omega_c t\} \\
 &= E \{[A_c^2 + 2A_c m(t) + m^2(t)] \cos^2 \omega_c t\} \\
 &= \frac{1}{2} E \{A_c^2 + m^2(t)\} = \frac{1}{2} A_c^2 + \frac{1}{2} E \{m^2(t)\} \\
 &= \frac{1}{2} A_c^2 + \frac{1}{2} P_m, \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

en donde se consideró que la señal del mensaje tiene media nula. Esta consideración es válida para muchas señales, incluyendo señales de audio por lo que se utilizará a menudo en el desarrollo del capítulo.

Entonces, la potencia de una modulación AM con gran portadora corresponde a la suma ponderada de la potencia del mensaje y la potencia necesaria para transmitir la portadora. Resultará fácil reconocer que la portadora no está enviando ningún tipo de información útil, por lo que es potencia que se “gasta” sin ningún beneficio en la transferencia de información. Para evaluar esto, considérese la fracción de potencia total que se utiliza en enviar las bandas laterales, que si contienen información:

$$\eta = \frac{P_{info}}{P_{total}} = \frac{E \{m^2(t)\}}{A_c^2 + E \{m^2(t)\}}.$$

Considerando el caso más simple en que el mensaje a transmitir es un tono, entonces $E \{m^2(t)\} = E \{A_m^2 \cos^2 \omega_m t\} = \frac{1}{2} a^2 A_c^2$, en donde a representa el índice de modulación. Entonces,

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} a^2 A_c^2}{A_c^2 + \frac{1}{2} a^2 A_c^2} = \frac{a^2}{2 + a^2};$$

Así, al recordar que $0 < a \leq 1$, la eficiencia de transmisión alcanzará a lo más un 33.3%. En las mejores condiciones, es decir $a = 1$, un 66.6% de la potencia total se consume en transmitir la portadora y representa la potencia desperdiciada por lo que concierne a la transferencia de información. Por el contrario, la eficiencia de transmisión en un sistema DSB-SC es de 100% y para un sistema DSB-SC con portadora piloto, es ligeramente menor a 100%.

Ejemplo 2.2 - Potencia en AM.

Considere una estación de radio AM (DSB-LC) que transmite una potencia portadora promedio total de salida de 40kW y usa un índice de modulación de 0.707 para modulación de señal senoidal. Calcule la potencia promedio total de salida, la eficiencia de transmisión y la amplitud pico de la portadora si la antena está representada por una carga resistiva de 50Ω.

Sol. La potencia total de la señal AM estará determinada por $\frac{1}{2} A_c^2 + \frac{1}{2} E \{m^2(t)\}$ y como se obtuvo anteriormente, para un tono $E \{m^2(t)\} = \frac{1}{2} a^2 A_c^2$, entonces $P = \frac{1}{2} A_c^2 \left[1 + \frac{a^2}{2}\right] = P_c \left[1 + \frac{a^2}{2}\right]$, en donde P_c representa la potencia promedio de la portadora. Así para $a = 0,707$, la potencia total será $P = 50kW$. La eficiencia de transmisión estará determinada por $\eta = \frac{0,5}{2+0,5} = 20\%$. Ahora bien, al considerar la carga resistiva, $P_c = \frac{A^2}{2R}$, lo que significa que $A = 2000$, y la máxima amplitud estará determinada por $A_{m\acute{a}x} = (1 + a)A = 3414[V]$. ■

La simplicidad del demodulador ha hecho de la modulación DSB-LC una práctica elección para radiodifusión AM. Dado que existen billones de receptores, utilizar alguna alternativa económica es algo extremadamente importante. La ineficiencia de potencia de esta modulación se justifica al pensar el hecho de que existen solo algunos transmisores frente a los billones de receptores antes mencionados; consecuentemente, construir transmisores poderosos y sacrificar eficiencia es efectivo en términos de costos ya que los receptores resultan ser muy sencillos.

2.4. Modulación de Banda Lateral Única

Se sabe que la transmisión de señales de doble banda lateral requiere –como su nombre lo indica– el doble del ancho de banda del mensaje, W , al momento de transmitirse; sin embargo, estas dos bandas laterales son redundantes. Entonces, ¿Se podrá transmitir una sola banda dado que esta contiene toda la información del mensaje? La respuesta a esta interrogante se puede encontrar demostrando que cualquiera de las dos bandas que se trasmitan es suficiente para reconstruir la señal del mensaje $m(t)$ en el receptor. Esta transmisión recibe el nombre de *single-sideband* (SSB) AM.

2.4.1. Expresión Matemática señales SSB

Considere que $m(t)$ es la señal de información y que tiene una transformada de Fourier determinada por $M(f)$. La generación de la señal SSB se hará tomando la banda superior (inferior) mediante algún filtro pasa alto (pasa bajo) de la salida de un modulador DSB-SC. Dicha salida estará determinada por

$$s_{dsb-sc}(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t ,$$

que espectralmente estará determinada por

$$S_{dsb-sc}(f) = A_c M(f - f_c) + A_c M(f + f_c) .$$

Asumiendo que se utilizará la banda superior, a la salida del modulador DSB-SC se tiene un filtro pasa alto (HPF) con respuesta

$$HPF = \begin{cases} 1 & , \quad |f| < f_c \\ 0 & , \quad i.o.c. \end{cases} ,$$

lo que se puede escribir mediante

$$HPF = u(f - f_c) + u(-f - f_c) ,$$

en donde $u(f)$ es la función escalón unitaria. A la salida del filtro el espectro de la señal modulada estará determinada por

$$S_M(f) = A_c M(f - f_c) u(f - f_c) + A_c M(f + f_c) u(-f - f_c) .$$

Tomando la transformada inversa de Fourier en ambos lados de la ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} s_m(t) &= A_c m(t) * \mathbb{F}^{-1} [u(f - f_c)] + A_c m(t) * \mathbb{F}^{-1} [u(-f - f_c)] \\ &= A_c m(t) * \mathbb{F}^{-1} [u(f)] e^{j\omega_c t} + A_c m(t) * \mathbb{F}^{-1} [u(-f)] e^{-j\omega_c t} , \end{aligned}$$

en donde $*$ representa la convolución en el tiempo. Utilizando el hecho de que

$$\mathbb{F} \left[\frac{1}{2} \delta(t) \pm \frac{j}{2\pi t} \right] = u(\pm f) ,$$

la transformada inversa queda finalmente expresada mediante

$$s_m(t) = A_c m(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right] e^{j\omega_c t} + A_c m(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{j}{2\pi t} \right] e^{-j\omega_c t} .$$

Considerando que $m(t) * \delta(t) = m(t)$ y que $m(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{m}(t)$ corresponde a la **transformada de Hilbert** de $m(t)$, entonces se obtiene que

$$s_m(t) = \frac{A_c}{2} [m(t) + j\hat{m}(t)] e^{j\omega_c t} + \frac{A_c}{2} [m(t) - j\hat{m}(t)] e^{-j\omega_c t} ,$$

en donde, al utilizar la igualdad de Euler, $e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$, se obtiene la expresión

$$s_{usb}(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t - A_c \hat{m}(t) \sin \omega_c t . \quad (2.8)$$

Para obtener la expresión para la banda inferior, se debe tener en cuenta que $s_{lsb} + s_{usb} = s_{dsb}$, y como $s_{dsb} = 2A_c m(t) \cos \omega_c t$, entonces

$$s_{lsb}(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t + A_c \hat{m}(t) \sin \omega_c t . \quad (2.9)$$

En resumen, la señal SSB se expresa de la forma

$$s_{ssb}(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t \mp A_c \hat{m}(t) \sin \omega_c t , \quad (2.10)$$

en donde $\hat{m}(t)$ corresponde a la transformada de Hilbert del mensaje, y el signo determina cuál banda se está utilizando. El signo positivo indica la banda lateral inferior, y el signo negativo indica la banda lateral superior.

Es interesante considerar que la transformada de Hilbert puede ser visto como un filtro lineal con respuesta a entrada impulso dada por $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ y respuesta en frecuencia dada por

$$H(f) = \begin{cases} -j & , f > 0 \\ j & , f < 0 \\ 0 & , f = 0 \end{cases} ,$$

por lo que la implementación no resulta ser complicada.

2.4.2. Demodulación Señales SSB

Para recuperar la señal de mensaje, se requiere un demodulador sincrónico o coherente en fase al igual que para el caso de la modulación DSB-SC.

Al considerar una detección con un pequeño error de fase ϕ , entonces se tiene

$$\begin{aligned}
 r(t) \cos(\omega_c t + \phi) &= [m(t) \cos \omega_c t + \hat{m}(t) \sin \omega_c t] \cos(\omega_c t + \phi) \\
 &= \frac{1}{2} m(t) \cos \phi + \frac{1}{2} \hat{m}(t) \sin \phi + (\text{términos de frecuencia doble}) \\
 \xrightarrow{LPF} &\frac{1}{2} m(t) \cos \phi + \frac{1}{2} \hat{m}(t) \sin \phi
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Se debe notar que de no existir diferencias de fase, la salida sería $\frac{1}{2}m(t)$. La diferencia existente no solo reduce la amplitud de la señal deseada en $\cos \phi$, sino que además agrega una banda lateral indeseable dada por la presencia de $\hat{m}(t)$.

Para solucionar el problema, al igual que con DSB-SC, se transmite un tono piloto a la frecuencia portadora, para así tener una referencia de señal coherente en fase y efectuar una demodulación sincrónica en el receptor. ¿Qué pasa con la demodulación al tener un error $\Delta\omega$?

2.5. Modulación de Banda Lateral Residual

Los altos requerimientos en frecuencia que se imponen en el filtro de las bandas laterales pueden relajarse levemente dejando que también pase un residuo, que sería una porción de una banda lateral no deseada. Así, el diseño del filtro se simplifica al costo de un leve incremento en el ancho de banda requerido del canal con respecto a SSB pero que resulta ser menor que el ocupado en una modulación DSB. Se se transmite además una portadora, la señal puede recobrase con un detector de envolvente, teniendo lo mejor de DSB-LC y SSB en una misma modulación.

Esta modulación es apropiada para señales que tienen una componente de baja frecuencia muy importante como por ejemplo señales de video, lo que explica porqué este tipo de modulación se utiliza en difusión de TV.

2.6. Ruido en AM

Las señales transmitidas mediante las modulaciones vistas anteriormente, siempre se verán afectadas por la presencia de ruido que se agregará durante el “viaje” que estas realizan a través del canal de comunicación. En la mayoría de los casos es el ruido electrónico el que perturba las señales durante la transmisión, por lo que la señal recibida corresponderá a la suma de la señal de interés, $s_m(t)$, y ruido electrónico que se modela mediante ruido blanco aditivo, $n(t)$. En símbolos, la señal recibida en el demodulador, $r(t)$, está determinada por

$$r(t) = s_m(t) + n(t) ,$$

siendo $n(t)$ un proceso de ruido blanco aditivo Gaussiano, *Additive White Gaussian Noise* (AWGN). En términos prácticos es el canal el que agrega este AWGN por lo que el presen-

te estudio suele recibir el nombre de *Transmisión de señales a través de un canal AWGN* o simplemente *Detección de Señales en la presencia de AWGN*.

Dada la presencia de este ruido, el concepto de la razón señal-ruido visto en la Sección 1.6.2 toma vital importancia, puesto que los niveles de ruido o de señal por si solos no representan nada si no se comparan entre ellos. Por otra parte, esta comparación permite introducir el concepto de señal mínima detectable, que corresponde a la mínima señal que el sistema podrá detectar en la presencia de ruido blanco.

2.6.1. Señales Pasabajo y Pasabanda

Una señal *pasabajo* es una señal cuyo espectro está contenido en torno a la frecuencia cero. Por otro lado, una señal *pasabanda* es una señal cuyo espectro está centrado en torno a otra frecuencia, ω_0 , distinta de cero y mayor al ancho de banda de la señal.

El caso extremo de señales pasabanda, es aquella que tiene solo una componente en frecuencia y es igual a ω_0 . Generalmente, puede ser escrita mediante

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) ,$$

que corresponde a una señal sinusoidal. La señal $x(t)$ se puede expandir mediante

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t + \phi) \\ &= A \cos \phi \cos \omega_0 t - A \sin \phi \sin \omega_0 t \\ &= x_c \cos \omega_0 t - x_s \sin \omega_0 t , \end{aligned}$$

en donde se puede ver que una señal de frecuencia única, tiene dos componentes. La primera, $x_c = A \cos \phi$ que está en la dirección de $\cos \omega_0 t$ es llamada *componente en fase* y la segunda, $x_s = A \sin \phi$, que está en la dirección de $-\sin \omega_0 t$ es llamada *componente de cuadratura*. Asumiendo ahora de que tanto la amplitud como la fase de la señal pueden sufrir variaciones muy lentas con respecto a ω_0 , la señal expandida quedaría

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)] \\ &= A(t) \cos[\phi(t)] \cos \omega_0 t - A(t) \sin[\phi(t)] \sin \omega_0 t \\ &= x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Esta señal contiene un rango de frecuencias, por lo que su ancho de banda no es cero, pero como las variaciones de la envolvente y de la fase con lentas, dicho ancho de banda resulta ser menor que el valor de ω_0 . Además, esto lleva a concluir que tanto la componente en fase como en cuadratura son señales pasabajo.

El resultado obtenido en la Ecuación (2.12), dice básicamente que cualquier señal pasabanda puede ser representada mediante dos señales pasabajo, conocidas como componentes en fase y en cuadratura.

2.6.2. Ruido Pasabanda

En muchos casos, el ruido blanco generado en una etapa de un sistema, es filtrado por la siguiente etapa, por lo que en la siguiente etapa se encuentra un ruido filtrado que es un proceso

pasabanda, es decir, su densidad espectral de potencia está ubicada fuera de la frecuencia cero y centrada mayormente alrededor de cierta frecuencia ω_c que es distinta de cero y es mayor que el ancho de banda del proceso.

En términos prácticos, se podría considerar que el ruido pasabanda corresponde a la porción de ruido blanco que logra pasar a través de los filtros de entrada en un receptor AM. Dado que la entrada de un receptor está sintonizado en torno a la frecuencia de la portadora, existirá dicha porción de ruido blanco que logra “entrar” al receptor, perturbando la señal modulada. Con esta descripción intuitiva, resulta más sencillo visualizar que el AWGN pasa a ser un ruido pasabanda dentro del proceso de demodulación.

Como se discutió en la Sección 2.6.1, este proceso pasabanda se podrá descomponer en sus componentes en fase y de cuadratura, por lo que se podrá describir mediante

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, \quad (2.13)$$

en donde $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son las componentes en fase y de cuadratura respectivamente. La potencia media de este ruido estará determinada por

$$N = \mathbb{E} \{n^2(t)\} = \mathbb{E} \{n_c^2(t) \cos^2 \omega_c t + n_s^2(t) \sin^2 \omega_c t\} = \frac{1}{2} \mathbb{E} \{n_c^2(t)\} + \frac{1}{2} \mathbb{E} \{n_s^2(t)\}. \quad (2.14)$$

Mediante análisis de las PSD de cada una de las componentes, se puede demostrar que

$$N = \mathbb{E} \{n^2(t)\} = \mathbb{E} \{n_c^2(t)\} = \mathbb{E} \{n_s^2(t)\}. \quad (2.15)$$

2.6.3. Ruido en Sistemas DSB-SC

La señal modulada para sistemas DSB-SC está determinada por $s_m(t) = m(t) \cos \omega_c t$ y el ruido pasabanda presente en el demodulador estará descrito mediante un ruido pasabanda $n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$. Así, la entrada al receptor estará determinada por

$$r(t) = s_m(t) + n(t) = m(t) \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t.$$

Ahora bien, la potencia de la señal estará dada por

$$S_i = \mathbb{E} \{s_m^2(t)\} = \mathbb{E} \{m^2(t) \cos^2 \omega_c t\} = \frac{1}{2} \mathbb{E} \{m^2(t)\},$$

y la potencia del ruido a la entrada será $N_i = \mathbb{E} \{n_c^2(t)\}$, conforme a la Ecuación (2.15). Así la potencia de la señal recibida estará dada por $\frac{1}{2} \mathbb{E} \{m^2(t)\} + \mathbb{E} \{n_c^2(t)\}$.

Entonces, al pasar por el demodulador sincrónico y coherente en fase, la señal demodulada quedará determinada por

$$\begin{aligned} r(t) \cos \omega_c t &= [m(t) \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t] \cos \omega_c t \\ &= m(t) \cos^2 \omega_c t + n_c(t) \cos^2 \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t \\ &= \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cos 2\omega_c t + \frac{1}{2} n_c(t) + \frac{1}{2} n_c(t) \cos 2\omega_c t - \frac{1}{2} n_s(t) \sin 2\omega_c t \\ &\xrightarrow{LPF} \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} n_c(t) = s_o(t) + n_o(t), \end{aligned}$$

en donde se han utilizado las identidades trigonométricas dadas por $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ y $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$. Nótese que a la salida del demodulador sincrónico, se tiene la presencia de la señal demodulada –como se vió anteriormente– y el ruido que fue capaz de pasar. La potencia de la señal de salida estará determinada por

$$S_o = E \{s_o^2(t)\} = E \left\{ \left[\frac{1}{2}m(t) \right]^2 \right\} = \frac{1}{4}E \{m^2(t)\} = \frac{1}{2}S_i ,$$

y la potencia del ruido a la salida será

$$N_o = E \{n_o^2(t)\} = E \left\{ \left[\frac{1}{2}n_c(t) \right]^2 \right\} = \frac{1}{4}E \{n_c^2(t)\} = \frac{1}{4}N_i .$$

Entonces, la razón señal ruido del receptor sincrónico para una señal DSB-SC estará determinada por

$$SNR_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{\frac{1}{2}S_i}{\frac{1}{4}N_i} = 2 \frac{S_i}{N_i} \quad (2.16)$$

Se puede notar, que el receptor mejora la SNR en un factor de 2, lo que se logra ya que el detector coherente rechaza todas las componentes fuera de fase de la entrada, es decir, en cuadratura. Esto a su vez reduce la potencia media del ruido a la mitad de su valor a la entrada.

2.6.4. Ruido en Sistemas DSB-LC

Para DSB-LC, al utilizar un detector sincrónico, se tiene que $m(t)$ es reemplazado por $A_c + m(t)$, luego

$$S_i = E \{[A_c + m(t)]^2 \cos^2 \omega_c t\} = \frac{1}{2}A_c^2 + \frac{1}{2}E \{m^2(t)\} ,$$

pues se asume que $E \{m(t)\} = 0$. La salida del demodulador seguirá siendo $S_o = \frac{1}{4}E \{m^2(t)\}$, luego

$$S_o = \frac{\frac{1}{2}E \{m^2(t)\}}{A_c^2 + E \{m^2(t)\}} S_i ,$$

y la razón señal ruido a la salida del demodulador estará determinada por

$$SNR_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{\frac{\frac{1}{2}E \{m^2(t)\}}{A_c^2 + E \{m^2(t)\}} S_i}{\frac{1}{4}N_i} = \frac{2E \{m^2(t)\}}{A_c^2 + E \{m^2(t)\}} \frac{S_i}{N_i} . \quad (2.17)$$

Como existe la restricción $|m(t)| < A$, la SNR es un poco más pobre que para la modulación DSB-SC.

Ruido en Sistemas DSB-LC con Detector de Envoltente

Al igual que para el caso de detector sincrónico, la señal y ruido de entrada se mantienen iguales. Entonces

$$S_i = \frac{1}{2}A_c + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{m^2(t)\} \quad \text{y} \quad N_i = \mathbb{E}\{n_c^2(t)\} .$$

Lamentablemente, el detector de envoltente es un sistema no lineal y solo se puede establecer algunos límites de su comportamiento. Usando una representación del ruido pasabanda, la señal recibida estará determinada por

$$r(t) = s_i(t) + n_i(t) = [A_c + m(t)] \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t ,$$

cuya envoltente estará determinada por

$$e(t) = \sqrt{[A_c + m(t) + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} ,$$

pues corresponde a la resultante de la suma fasorial de las componentes en fase y cuadratura. Se puede demostrar, que para una razón señal-ruido alta, la envoltente se puede aproximar por medio de una expansión binomial para obtener

$$e(t) \approx A_c + m(t) + n_c(t) .$$

Acá, la señal útil es $s_o(t) = m(t)$, por lo que $S_o = \mathbb{E}\{m^2(t)\}$, mientras que el ruido es $n_o(t) = n_c(t)$, por lo que $N_o = \mathbb{E}\{n_c^2(t)\} = N_i$. Entonces

$$SNR_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{2\mathbb{E}\{m^2(t)\}}{A_c^2 + \mathbb{E}\{m^2(t)\}} \frac{S_i}{N_i} , \quad (2.18)$$

para DSB-LC con detector de envoltente y SNR alta. Nótese que la relación es idéntica a la obtenida mediante modulación sincrónica, por lo que ambas tienen el mismo comportamiento frente al ruido.

En el caso particular de modular un tono, la SNR se verá traducida en

$$SNR_o = \frac{2a^2}{2 + a^2} \frac{S_i}{N_i} ,$$

por lo que el máximo aumento en la SNR para una modulación completa será de $\frac{2}{3}$.

2.6.5. Ruido en Sistemas SSB

Considerando la representación de una señal SSB dada por

$$s_m(t) = m(t) \cos \omega_c t \mp \hat{m}(t) \sin \omega_c t ,$$

que será la señal de entrada al receptor y un ruido pasabanda, se tiene:

$$\begin{aligned} S_i &= \mathbb{E}\{s_m^2(t)\} = \mathbb{E}\{[m(t) \cos \omega_c t \mp \hat{m}(t) \sin \omega_c t]^2\} \\ &= \mathbb{E}\{m^2(t) \cos^2 \omega_c t \mp 2m(t)\hat{m}(t) \cos \omega_c t \sin \omega_c t + \hat{m}^2(t) \sin^2 \omega_c t\} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\{m^2(t)\} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\{\hat{m}^2(t)\} . \end{aligned}$$

Se puede utilizar el Teorema de Parseval para demostrar que $E \{m^2(t)\} = E \{\hat{m}^2(t)\}$, por lo que

$$S_i = E \{m^2(t)\} .$$

Además, conforme a lo estudiado anteriormente el ruido de entrada tendrá una potencia media de $N_i = E \{n_c^2(t)\}$.

Ahora bien, la salida del detector sincrónico y coherente en fase para la modulación SSB está determinada por la Ecuación (2.11) al considerar una fase nula, es decir $\phi = 0$. En la presencia de ruido pasabanda, resultará sencillo demostrar que la señal de salida total será $\frac{1}{2}m(t) + \frac{1}{2}n_c(t)$. La señal útil es $\frac{1}{2}m(t)$ por lo que

$$S_o = \frac{1}{4}E \{m^2(t)\} = \frac{1}{2}S_i .$$

Para el caso del ruido de salida, la potencia será

$$N_o = \frac{1}{4}E \{n_c^2(t)\} = \frac{1}{4}N_i .$$

Así, la razón señal-ruido estará determinada por

$$SNR_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{\frac{1}{2}S_i}{\frac{1}{4}N_i} = \frac{S_i}{N_i} .$$

Como DSB requiere el doble de ancho de banda que SSB y se ha considerado que el ruido presente es modelado por ruido pasabanda, entonces se puede concluir que ambas demodulaciones presentan el mismo desempeño frente al ruido.

Capítulo 3

Modulación Angular

COMENTAR ALGO...

3.1. Introducción

En el presente capítulo se estudiarán los métodos de modulación en frecuencia (Frequency Modulation, FM) y de modulación en fase (Phase Modulation, PM). En FM, la frecuencia del carrier f_c es modificada conforme las variaciones en la señal del mensaje y en PM es la fase de la señal portadora la que es modificada en base al mismo patrón.

Ambas modulaciones en conjunto son llamadas *Modulaciones Angulares*, son no-lineales, mucho más complejas de implementar y mucho más difíciles de analizar, por lo que muchas veces se recurre a análisis aproximados. A pesar de estas potenciales desventajas y además de necesitar un ancho de banda mayor, dada su alta inmunidad al ruido son altamente utilizados en sistemas Hi-Fi.

3.2. Representación Matemática

El ángulo de una señal senoidal, se describe en términos de una frecuencia y un ángulo de fase:

$$s_c(t) = A \cos [\omega_c t + \phi(t)] = A \cos [\theta(t)] .$$

Basándose en una representación fasorial, con velocidad angular constante, la relación entre esta representación y el ángulo de la función senoidal, $\theta(t)$, es:

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_i(\tau) d\tau + \theta_0 ,$$

en donde $\omega_i(t)$ es la frecuencia angular instantánea y θ_0 es una constante real arbitraria. Derivando , se puede obtener que

$$\omega_i(t) = \frac{d \theta(t)}{dt} = \omega_c + \frac{d \phi(t)}{dt} \quad (3.1)$$

Considerando que el ángulo de fase es proporcional a cierta señal de entrada (mensaje) $m(t)$, vale decir $\phi(t) = k_p m(t)$ se tiene que

$$\theta(t) = \omega_c t + k_p m(t) ,$$

con ω_c y k_p constantes. Como es la fase la que está relacionada en forma lineal con el mensaje, esta modulación recibe el nombre de **Modulación en Fase**.

Por otra parte, si ahora se supone que la frecuencia de la portadora se modifica en factores de $\Delta\omega = k_f m(t)$, entonces la frecuencia instantánea estará dada por

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t) , \quad (3.2)$$

en donde ω_c y k_f son constantes. Este caso, se conoce como **Modulación en Frecuencia**. Es importante tener en cuenta, que las constantes k_p y k_f reciben el nombre de *constantes de desviación de fase y de frecuencia* respectivamente.

Nótese que la relación que existe entre ambas modulaciones se puede obtener usando el hecho de que

$$\omega_i(t) - \omega_c = k_f m(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} ,$$

entonces, por la Ecuación (3.1), se tiene

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t) & , PM \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & , FM \end{cases} \quad (3.3)$$

Para un mensaje de información $m(t)$, entonces las desviaciones máximas que se pueden producir en fase y frecuencia están dadas por

$$\Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \text{máx}\{|m(t)|\} , \text{ para PM; y} \quad (3.4)$$

$$\Delta f_{\text{máx}} = k_f \text{máx}\{|m(t)|\} , \text{ para FM.} \quad (3.5)$$

Ejemplo 3.1 - Modulación Tono de Prueba.

Encontrar la señal modulada por un tono de prueba $m(t) = A \cos \omega_m t$.

Sol. Para la modulación PM, $\phi(t) = k_p m(t) = A k_p \cos \omega_m t$ y para FM, $\phi(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau = \frac{A k_f}{f_m} \sin \omega_m t$, con $f_m = \omega_m / 2\pi$. Así, la señal modulada, $s_m(t)$, estará dada por

$$s_m(t) = \begin{cases} A_c \cos [\omega_c t + A k_p \cos \omega_m t] & , PM \\ A_c \cos \left[\omega_c t + \frac{A k_f}{f_m} \sin \omega_m t \right] & , FM \end{cases} \quad \blacksquare$$

Se definen los índices de modulación angular mediante

$$\beta_p = k_p \text{máx}\{|m(t)|\} = \Delta\phi_{\text{máx}} , \quad (3.6)$$

$$\beta_f = \frac{k_f \text{máx}\{|m(t)|\}}{W} = \frac{\Delta f_{\text{máx}}}{W} , \quad (3.7)$$

en donde W representa el ancho de banda del mensaje $m(t)$. Para el caso particular del Ejemplo 3.1, se tiene que $\beta_p = A k_p$ y $\beta_f = A k_f / f_m$.

3.3. FM de Banda Angosta

Considere la modulación en frecuencia para un tono de prueba, como se hizo en el Ejemplo 3.1. El ángulo de la portadora, estará determinado por

$$\theta(t) = \omega_c t + \beta_f \sin \omega_m t ,$$

por lo que la señal modulada estará determinada por $A_c \cos [\omega_c t + \beta_f \sin \omega_m t]$.

Utilizando trigonometría, se obtiene la relación

$$s_m(t) = A \cos \omega_c t \cos [\beta \sin \omega_m t] - A \sin \omega_c t \sin [\beta \sin \omega_m t] .$$

Si se quiere utilizar un ancho de banda pequeño para realizar la modulación, esto se traduce en mantener pequeño el valor de $\Delta\omega$. Como $\beta_f = \frac{\Delta\omega}{W}$ y $W > 0$, esto significa que β_f será muy pequeño. A su vez, $\sin \omega_m t \geq 1$ por lo que para un β_f muy pequeño se pueden realizar las aproximaciones

$$\cos [\beta \sin \omega_m t] \approx 1 , \text{ y} \tag{3.8}$$

$$\sin [\beta \sin \omega_m t] \approx \beta \sin \omega_m t . \tag{3.9}$$

Así, FM de banda angosta (*Narrow Band FM*, *NBFM*) se escribe como

$$s_{nbfm}(t) = A \cos \omega_c t - A\beta \sin \omega_m t \sin \omega_c t . \tag{3.10}$$

Si se considera un caso más general, entonces la fase $\phi(t)$ que depende de las constantes de desviación y del mensaje, deberá ser siempre $\phi(t) \ll 1$, para todo t . Así, la ecuación para NBFM queda determinada por

$$\begin{aligned} s_{nbfm}(t) &= A \cos [\omega_c t + \phi(t)] , \quad \phi(t) \ll 1 \\ &= A \cos \omega_c t \cos \phi(t) - A \sin \omega_c t \sin \phi(t) , \quad \phi(t) \ll 1 \\ &\approx A \cos \omega_c t - A\phi(t) \sin \omega_c t , \end{aligned} \tag{3.11}$$

en donde, al igual que para el tono de prueba, se han utilizado las aproximaciones $\cos \phi(t) \approx 1$ y $\sin \phi(t) \approx \phi(t)$, conforme a que $\phi(t) \ll 1$. Esta ecuación tiene una similitud increíble con la señal modulada en amplitud DSB-LC, sin embargo acá la modulación se realiza mediante una función seno, que no está en fase con la función coseno. Esto último implica que la amplitud de la señal resultante estará determinada por la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por los fasores de la portadora y del mensaje modulado.

FALTA cota de BETA

3.4. FM de Banda Ancha

Dada la no-linealidad inherente a los sistemas de modulación angular, en análisis exacto resulta ser muy complejo en términos matemáticos, por lo que usualmente se requieren aproximaciones para realizar dicho estudio. Para este curso, se estudiará el caso particular de la modulación de banda ancha con un tono de prueba.

Considérese entonces el caso en donde se modula un tono sinusoidal de prueba¹. La señal modulada estará dada por

$$s_m(t) = A \cos [\omega_c t + \beta \sin \omega_m t] ,$$

en donde β es el índice de modulación que puede ser β_p ó β_f si $\sin \omega_m t$ se reemplaza por $\cos \omega_m t$. Considerando la relación de Euler, la señal modulada se puede escribir como

$$s_m(t) = \mathbf{Re} \{ A e^{j\omega_c t} e^{j\beta \sin \omega_m t} \} .$$

Dado que la función $\sin \omega_m t$ es periódica con periodo $T_m = \frac{1}{f_m} = \frac{2\pi}{\omega_m}$, también lo será la exponencial compleja $e^{j\beta \sin \omega_m t}$, por lo que se puede expandir en series de Fourier. Los coeficientes de dicha serie se obtienen de la integral

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} e^{j\beta \sin \omega_m t} e^{-jn\omega_m t} dt \\ &= \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} e^{j\beta \sin \omega_m t - n\omega_m t} dt \\ &\stackrel{u=\omega_m t}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\beta \sin u - nu} dt . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esta última expresión es una integral muy conocida que recibe el nombre de *Función de Bessel de Primera Clase, de orden n y argumento β* y que se denota como $J_n(\beta)$. Entonces la expansión en series de Fourier buscada queda expresada como

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t} ,$$

por lo que la señal modulada quedará expresada mediante

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \mathbf{Re} \left\{ A e^{j\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t} \right\} \\ &= \mathbf{Re} \left\{ A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t} e^{j\omega_c t} \right\} \\ &= A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t \end{aligned} \quad (3.13)$$

A modo de ejemplificación, la Tabla 3.1 muestra algunos valores de la función de Bessel para distintos índices de modulación. Resulta de interés considerar las siguientes propiedades de la función de Bessel

1. $J_n(\beta)$ es de valor real
2. $J_n(\beta) = J_{-n}(\beta)$ para n par

¹Esto quiere decir un seno en PM y un coseno en FM.

3. $J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta)$ para n impar

4. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)^2 = 1$

Expandiendo la Ecuación (3.13) se tiene

$$s_m(t) = A \left[\begin{array}{l} J_0(\beta) \cos \omega_c t + J_1(\beta) \cos(\omega_c + \omega_m)t + J_2(\beta) \cos(\omega_c + 2\omega_m)t + \dots \\ + J_{-1}(\beta) \cos(\omega_c - \omega_m)t + J_{-2}(\beta) \cos(\omega_c - 2\omega_m)t + \dots \end{array} \right],$$

pero si se utilizan las propiedades 2 y 3 de la función de Bessel, entonces la expansión queda determinada por

$$s_m(t) = A \left[\begin{array}{l} J_0(\beta) \cos \omega_c t + J_1(\beta)[\cos(\omega_c + \omega_m)t - \cos(\omega_c - \omega_m)t] \\ + J_2(\beta)[\cos(\omega_c + 2\omega_m)t + \cos(\omega_c - 2\omega_m)t] \\ + J_3(\beta)[\cos(\omega_c + 3\omega_m)t - \cos(\omega_c - 3\omega_m)t] + \dots \end{array} \right].$$

En el último desarrollo se puede notar que la modulación angular tiene frecuencias de la forma $\omega_c t + n\omega_m$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ por lo que su ancho de banda real de la señal modulada es infinito. Sin embargo, dado que al aumentar n la amplitud de las sinusoidales se hacen cada vez más pequeñas como se puede observar en la Tabla 3.1, entonces se habla de un Ancho de Banda **Efectivo** de una señal modulada en frecuencia que resulta finito.

Nace entonces la pregunta *¿Qué valor de la función de Bessel se considerará como parte del ancho de banda y qué valor se dejará fuera?* La mejor forma de responder esto, es mediante consideraciones de potencia. En general el ancho de banda efectivo para una modulación angular se define como la frecuencia en la que se incluye al menos un 98 % de la potencia total². En la práctica, se utiliza como referencia la portadora no modulada y se considera como significativa una componente con magnitud igual o mayor al 1 % de dicha señal, luego

$$|J_n(\beta)| \geq 0,01, \tag{3.14}$$

será la cota que determina el ancho de banda efectivo. Sin embargo, esto no quiere decir que para algún valor de n anterior no se logre ya incluir dicho 98 %.

Tabla 3.1. Tabla de valores de la función de Bessel para diferentes índices de modulación

β	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
0.1	0.998	0.050	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.938	0.242	0.031	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.0	0.765	0.440	0.115	0.020	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.0	0.224	0.557	0.353	0.129	0.034	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
3.0	-0.260	0.339	0.486	0.309	0.132	0.043	0.011	0.003	0.000	0.000	0.000
4.0	-0.397	-0.066	0.364	0.430	0.281	0.132	0.049	0.015	0.004	0.001	0.000
5.0	-0.178	-0.328	0.047	0.365	0.391	0.261	0.131	0.053	0.018	0.006	0.001
10.0	-0.246	0.043	0.255	0.058	-0.220	-0.234	-0.014	0.217	0.318	0.292	0.207

²Esto quiere decir que se desprecia un 1 % por cada una de las bandas, inferior y superior.

3.5. Ancho de Banda en FM

Utilizando las componentes que cumplen la condición impuesta en la Ecuación (3.14), resulta fácil notar que el ancho de banda de una señal modulada en frecuencia se calculará mediante

$$B = 2nW, \quad (3.15)$$

en dónde W es el ancho de banda del mensaje y que para el caso del tono de prueba corresponde a f_m .

Si se considera que los $J_n(\beta)$ disminuyen con rapidez para $n > \beta$, entonces el ancho de banda con un índice de modulación muy grande puede aproximarse tomando la última banda lateral en que $n = \beta$, luego

$$B = 2nf_m \approx 2\beta f_m = 2\frac{\Delta f}{f_m} f_m = 2\Delta f, \text{ para } \beta \text{ muy grande.}$$

Por otra parte, para valores pequeños de β , las únicas funciones de Bessel con magnitud significativa son J_0 y J_1 , conforme a lo estudiado para NBFM. Luego se puede realizar la aproximación

$$B \approx 2f_m, \text{ para } \beta \text{ muy pequeño.}$$

Estas aproximaciones se pueden generalizar mediante la **Regla de Carson** que determina el ancho de banda de una señal FM mediante

$$B_c \approx 2(\Delta f + f_m) = 2(1 + \beta)f_m. \quad (3.16)$$

En general, la aproximación de Carson es menor al ancho de banda exacto determinado por la Ecuación (3.15).

La Tabla 3.2 muestra un resumen con las principales aproximaciones utilizadas en el cálculo del ancho de banda.

Tabla 3.2. Aproximaciones para el cálculo del ancho de banda de FM

Valor	Clasificación	Aproximación
$\beta < 0,316$	Banda Angosta	$B \approx 2f_m$
$\beta > 0,316$	Banda Ancha	\nexists
$\beta > 30$	Banda Ancha	$B \approx 2\Delta f$
$\beta > 50$	Banda Ancha	$n = \beta$

3.6. Potencia en FM

La potencia total de una señal modulada en frecuencia será

$$P_{FM} = E \{s_m^2(t)\} = A^2 E \left\{ \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t \right]^2 \right\},$$

entonces, considerando que el valor medio de la función coseno es cero y que el valor medio de su versión cuadrática es un medio, se puede obtener que

$$P_{FM} = A^2 \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) \cos^2(\omega_c + n\omega_m)t \right\} = \frac{1}{2} A^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) .$$

En base a la propiedad 4 de la función de Bessel, se obtiene que la potencia de una señal modulada en frecuencia (o fase) es

$$P_{FM} = \frac{1}{2} A^2 , \quad (3.17)$$

que corresponde a la potencia de la señal portadora y, evidentemente, es constante para cualquier índice de modulación.

Cualquier banda lateral, incluyendo la portadora, se puede hacer tan pequeña como se desee eligiendo un valor de β apropiado. Esto quiere decir que para algunos valores del índice de modulación como $\beta = 2,405$ ó $\beta = 5,52$, se logrará cancelar el término portador $J_0(\beta)$, concentrando toda la potencia promedio en las bandas laterales. Estos puntos son fáciles de identificar en un analizador de espectro y sirven como puntos de calibración para β y Δf .

3.7. Demodulación de Señales FM

Existen dos metodologías que se estudiarán en el curso: forma directa e indirecta de la obtención de la señal de mensaje, $m(t)$.

3.7.1. Método Directo

Si se toma la primera derivada de la señal modulada en ángulo con respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s_m(t) &= \frac{d}{dt} A \cos \left[\omega_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \\ &= -A[\omega_c + k_f m(t)] \sin \left[\omega_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] , \end{aligned}$$

en donde se distingue una envolvente dada por $-A[\omega_c + k_f m(t)]$ y una señal sinusoidal dada por $\sin \left[\omega_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$. En la envolvente se encuentra la señal de información $m(t)$ sumado a un valor continuo que puede ser fácilmente eliminada por filtrado. Así, resulta claro que la forma de realizar una demodulación es utilizando un detector de envolvente a continuación de un derivador. La señal de salida será entonces $m(t)$ al pasarla por un filtro que elimine la componente continua, como por ejemplo un transformador 1:1 sintonizado en el ancho de banda del mensaje, W .

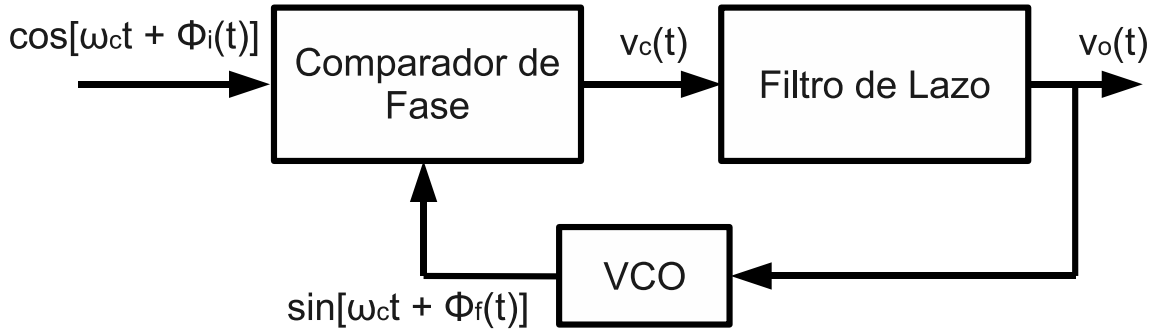


Fig. 3.1. Diagrama de Bloques de phase-locked loop (PLL)

3.7.2. Método Indirecto

Otra forma de realizar la detección es utilizando un lazo de fase cerrada, ó *phase-locked loop* (*PLL*) que también recibe en nombre de “Lazo de seguimiento de Fase”.

En la Fig. 3.1 se muestra el diagrama de bloques de un PLL. Ambas entradas al comparador de fase se suponen periódicas y con la misma frecuencia fundamental. El comparador de fase detecta la diferencia en el tiempo entre las dos señales y produce una tensión de salida proporcional a dicha diferencia. Para entradas sinusoidales, esta diferencia en tiempo puede expresarse también como diferencia de fase.

En general, la salida del comparador de fase es proporcional al valor promedio del producto de las dos entradas, en función de sus desplazamientos relativos en el tiempo. Si las entradas son $x(t)$ e $y(t)$, esto puede expresarse como

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt = R_{xy}(\tau) ,$$

en donde T es el periodo de la señal de entrada. Entonces, la salida del comparador es proporcional a la correlación cruzada entre las señales de entrada. Si ambas entradas son senoidales, entonces la salida será proporcional a la correlación de dos funciones cosenoidales. En símbolos

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} A_x A_y \cos \omega_c \tau ,$$

en donde A_x y A_y son las amplitudes máximas de $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente.

Si se grafica la función de correlación cruzada, se observa que la salida es cero en los múltiplos impares de $\pm T/4$. Estos puntos se llaman *nulos* y corresponde a los puntos de operación deseados, por lo que el resto del PLL se diseña para ello. Nombrando como $\phi_i(t)$ y $\phi_f(t)$ a las fases de entrada y de realimentación respectivamente, entonces la salida del comparador alrededor del punto de operación es

$$v_c(t) = k_c [\phi_i(t) - \phi_f(t)] = k_c \Delta \phi . \quad (3.18)$$

La finalidad del filtro de lazo, es lograr controlar la respuesta dinámica del PLL. Supóngase que dicho filtro tiene respuesta a entrada impulso denotada por $h(t)$, entonces la salida del lazo será

$$v_o(t) = v_c(t) * h(t) , \quad (3.19)$$

por lo que $h(t)$ se diseña para modificar el comportamiento del lazo de salida.

La salida del Oscilador Controlado por Tensión, *Voltage Controlled Oscillator (VCO)* genera una señal periódica de amplitud constante cuya fundamental es proporcional a la señal de entrada. Si ω_f es la frecuencia instantánea con respecto a la fundamental, se tiene que $\omega_f = k_f v_o(t)$, en donde la constante k_f tiene dimensiones de radianes por segundo por volt. Entonces, la fase del VCO es, dentro de una constante arbitraria,

$$\phi_f(t) = k_f \int_0^t v_o(t) dt \quad (3.20)$$

Las Ecuaciones (3.18), (3.19) y (3.20) describen la respuesta dinámica del PLL y los parámetros controladores son los factores de ganancia de lazo k_c , k_f y los parámetros del filtro.

Derivando la Ecuación (3.20) con respecto al tiempo, se obtiene que

$$v_o(t) = \frac{1}{k_f} \frac{d\phi_f(t)}{dt} . \quad (3.21)$$

Si la ganancia del lazo es alta entonces $\Delta\phi$ será muy pequeño, por lo que $\phi_i(t) \approx \phi_f(t)$. Además, por la Ecuación (3.21) se obtiene que la salida es proporcional a la frecuencia instantánea de la entrada referida a la portadora. Por lo tanto, el PLL efectúa la demodulación deseada de la señal FM de entrada.

Se ha supuesto que la diferencia de frecuencias es muy pequeña. Si dicha diferencia es menor que el ancho de banda del PLL, entonces el lazo se cerrará con rapidez lo que es usual en la detección FM. De ser mayor, se deberá hacer un barrido de frecuencias en el VCO hasta encontrar este punto óptimo.

3.8. Preénfasis y Deénfasis

Realizando un análisis del SNR en transmisión PM y FM, se puede demostrar que la potencia espectral del ruido a la salida de un detector está determinada por

$$\mathbf{S}_n = \begin{cases} \frac{N_0}{A^2} & , PM \\ \frac{N_0}{A^2} f^2 & , FM \end{cases} \quad (3.22)$$

en donde se ha considerado la presencia de WGN a la entrada para $|f| < W$, y N_0 es la potencia media del ruido de entrada.

Se puede notar que para modulación PM se logra una respuesta plana y para FM una respuesta parabólica que intersecta el eje de las ordenadas en cero. Esto quiere decir que para bajas frecuencias la inmunidad al ruido de FM es superior, ya que está muy cercana a cero pero a medida que la frecuencia va en aumento, entonces responde mejor la modulación PM pues la función parabólica tiene una alta tasa de aumento.

Entonces, el concepto de preénfasis y deénfasis busca aprovechar las cualidades de cada una de estas modulaciones: Que el sistema trabaje como FM a bajas frecuencias y como PM en altas frecuencias.

Para lograr esto, se debe tener en mente que un modulador PM es la conexión en cascada de un derivador y un modulador FM. Entonces, si se hace que dicho derivador funcione como tal en altas frecuencias, y que tenga una respuesta unitaria en bajas frecuencias se lograría aprovechar ambas modulaciones.

Una buena forma de aproximar el comportamiento deseado es mediante un Filtro Pasa Alto (HPF). Esto quiere decir que para recuperar el comportamiento original de la señal, se deberá utilizar un Filtro Pasa Bajos (LPF). Las funciones de transferencia de preénfasis y deénfasis estan determinadas por

$$|H_p(f)| = \sqrt{1 + \frac{f^2}{f_0^2}} \quad \text{y,} \quad |H_d(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_0^2}}}$$

respectivamente. Una forma de justificar esta aproximación, es considerando que para evitar una disminución de la SNR en altas frecuencias, la señal es amplificada en este intervalo³ para hacerla más inmune al ruido, luego se utilizará un HPF. Para “normalizar” la característica se deberá utilizar un LPF que contrarreste dicho efecto.

Se puede demostrar que al utilizar este esquema, la SNR se ve incrementada en un factor de

$$\frac{SNR_{PD}}{SNR_0} = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{W}{f_0}\right)^3}{\left(\frac{W}{f_0}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{W}{f_0}\right)} \quad (3.23)$$

en donde W es el ancho de banda del mensaje y f_0 es la frecuencia de corte del filtro, es decir su ancho de banda de 3dB.

En la práctica, para transmisión FM de música y voz, se utiliza una constante de tiempo de RC de $75\mu\text{m}$, luego el ancho de banda de 3dB será

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \approx 2,1\text{kHz} .$$

Ahora si se considera que el máximo valor de audio es cercano a los 15kHz, entonces $\left(\frac{W}{f_0}\right) = \frac{15}{2,1} = 7,1428$. Así el incremento real del SNR es

$$SNR_{PD} = 21,27 SNR_0 ,$$

que expresado en dB es

$$SNR_{PD}[dB] = 13,27[dB] + SNR_0[dB] ,$$

lo que es algo realmente significativo para solo utilizar un filtro RC.

³En rigor, atenuada en frecuencias más bajas.

Libros de Referencia.

La información contenida en el presente texto, ha sido extraída de variados textos escritos que posee en DIE, el Laboratorio de Transmisión y simplemente los autores de este compilado de información.

Toda la información acá expresada tiene caracter netamente educacional y no pretende ser en ninguna forma un atentado contra los derechos de copia ni de autor de cada uno de los libros que acá se citan. El contenido grueso de esta obra es de autoría de:

- **“Fundamentals of Communication Systems”**, John Proakis, Masoud Salehi. © 2005, Pearson Education, Inc.
- **“Introducción a los Sistemas de Comunicaciones”**, F. G. Stremmer. © 1993, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.
- **“Digital Communications - Fundamentals and Applications”**, Bernard Sklar. © 1998, Prentice-Hall Inc.
- **“Elementary Statistics”**, Paul Hoel. © 1976, John Wiley & Sons, Inc.